

Листок 3. Теория Струн

(Сканы/фото решений данного листка принимаются
на e-mail: hetzif@yandex.ru)

Задача 1. Рассмотрите состояния на первом массивном уровне для $D = 26$ мерной струны, то есть на $N = 2$ уровне:

$$(s_{\mu\nu}\alpha_{-1}^{\mu}\alpha_{-1}^{\nu} + v_{\mu}\alpha_{-2}^{\mu})|0; k\rangle, \quad (0.1)$$

полное число параметров которых очевидно равно: $\frac{26 \cdot 27}{2} + 26 = 377$.

(а). Запишите уравнения накладываемые на $s_{\mu\nu}$, v_{μ} и k^{μ} условием физичности состояния, то есть условием, что

$$(L_0 - 1)|\text{state}\rangle = 0, \quad L_1|\text{state}\rangle = L_2|\text{state}\rangle = 0, \quad (0.2)$$

где

$$L_0 = \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}\alpha_n, \quad L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{m-n}\alpha_n : \quad (0.3)$$

и $[\alpha_m^{\mu}, \alpha_n^{\nu}] = m\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m,0}$ и также $\alpha_0^{\mu} = \sqrt{2\alpha'}p^{\mu}$. Сколько независимых параметров (физических состояний) остается после наложения физических условий?

(б). Найдите ноль-состояния на втором уровне:

$$|\text{null}\rangle_1 = (L_{-2} + c_1 L_{-1}^2)|0; k\rangle, \quad |\text{null}\rangle_2 = L_{-1}a_{\mu}\alpha_{-1}^{\mu}|0; k\rangle, \quad (0.4)$$

то есть используя уравнения $L_1|\text{null}\rangle_{1,2} = L_2|\text{null}\rangle_{1,2} = 0$, найдите c_1 и условие на a_{μ} . Запишите калибровочные преобразования, которые существуют из-за таких ноль-состояний.

(в). Покажите, что калибровочные преобразования сокращают число физических состояний до 324 (то есть до 324 мерного представления $SO(25)$). Удобно работать в системе отчета покоя частицы.

(г). Повторите такие же вычисления для открытой струны на втором массивном уровне, то есть на $N = 3$ уровне:

$$(\omega_{\mu\nu\sigma}\alpha_{-1}^{\mu}\alpha_{-1}^{\nu}\alpha_{-1}^{\sigma} + b_{\mu\nu}\alpha_{-1}^{\mu}\alpha_{-2}^{\nu} + v_{\mu}\alpha_{-3}^{\mu})|0; k\rangle, \quad (0.5)$$

где изначально имеется $\frac{26 \cdot 27 \cdot 28}{3!} + 26^2 + 26 = 3978$ параметров. Покажите, что после наложения физических условий и учета калибровочной инвариантности мы находим 2900 и 300 мерные представления $SO(25)$, то есть симметричное бесследовое представление третьего ранга $SO(25)$ (2900 компонент) и антисимметричное представление второго ранга $SO(25)$ (300 компонент).

(е). Найдите каким условиям и характеристикам удовлетворяют физические состояния на $N = 2, 3$ уровнях в произвольной системе отсчета (а не только в системе покоя). Вам понадобятся некоторые из следующих условий и характеристик:

1. *Спиновая характеристика.* (Примеры: Скаляр, Вектор, Тензор и т.д.),
2. *Условие поперечности.* (Пример: $A_{\mu\nu\lambda}k^{\lambda} = 0$),
3. *Геометрические условия.* (Примеры: Антисимметричность, симметричность, бесследовость, самодуальность и т.д.)
4. *Калибровочная инвариантность.* (Пример: $A_{\mu} \sim A_{\mu} + k_{\mu}$).

Замечание: Вы можете решить задачу двумя способами. Либо разрешить условия в системе покоя, а потом перейти к произвольной системе. Либо наоборот.

Задача 2. (Спектр закрытой струны) В закрытой струне имеются две коммутирующие алгебры Вирасоро L_n и \bar{L}_n . Эти алгебры строятся из бозонов α_n^μ и $\bar{\alpha}_n^\mu$ соответственно как и в случае открытой струны. (Эти бозоны являются независимыми и коммутируют между собой $[\alpha_n^\mu, \bar{\alpha}_m^\mu] = 0$ для $n, m \neq 0$, а для нуль-мод верно $\alpha_0^\mu = \bar{\alpha}_0^\mu = \hat{p}^\mu$). Физические состояния удовлетворяют условиям

$$L_n|\text{phys}\rangle = \bar{L}_n|\text{phys}\rangle = (L_0 - 1)|\text{phys}\rangle = (\bar{L}_0 - 1)|\text{phys}\rangle = 0, \quad \text{для } n > 0.$$

Также как и в случае открытой струны, в спектре имеются духи, по которым нужно отфакторизовать. Рассмотрите состояние на первом уровне вида

$$A_{\mu\nu}\alpha_{-1}^\mu\bar{\alpha}_{-1}^\nu|0, k\rangle$$

и найдите условия, которым должен удовлетворять $A_{\mu\nu}$ для того, чтобы это состояние было физическим. Приведите ответ в системе покоя и в произвольной системе отсчета.

Задача 3. Рассмотрите открытую бозонную $D = 26$ струну, проквантованную в калибровке светового конуса.

(а). Найдите явный вид генераторов алгебры Лоренца J^{i-} и J^{i+} , $i = 1, \dots, 24$.

(б). Найдите какие состояния на уровне $N = 3$:

$$\alpha_{-1}^i\alpha_{-1}^j\alpha_{-1}^k|0; k\rangle, \quad \alpha_{-1}^i\alpha_{-2}^j|0; k\rangle, \quad \alpha_{-3}^i|0; k\rangle, \quad i, j, k = 1, \dots, 24 \quad (0.6)$$

смешиваются, чтобы образовать все $SO(25)$ мультиплеты на этом уровне, то есть симметричное бесследовое представление третьего ранга $SO(25)$ (2900 компонент) и антисимметричное представление второго ранга $SO(25)$ (300 компонент), что как и предполагается совпадает с результатом Задачи 1. (Один из способов решить данную задачу это применить J^{i-} и J^{i+} к состояниям на третьем уровне, чтобы понять какие из них смешиваются под действием $SO(25)$, но можно обойтись и без этого).

(в). Повторите данное упражнение для состояний на $N = 4$ уровне. Какие представления $SO(25)$ появляются на данном уровне?